О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК С ПЕРЕМЕННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Б.В.Гусев
«Российский университет транспорта (МИИТ)»
Москва, Россия e-mail: info-rae@mail.ru

В.В.Саурин
Институт проблем механики Российской академии наук
Москва, Россия e-mail: saurin@ipmnet.ru

Структурный динамический анализ на основе линейной теории упругости

Основные вопросы

1) Какое из определяющих соотношений будет ослаблено, а какое будет выполняться в точности;

2) Какие приближения неизвестных функций следует выбрать для построения приближенного решения;

3) каким образом можно оценить точность приближенного решения.

Постановка задачи 1.

Граница пластины:

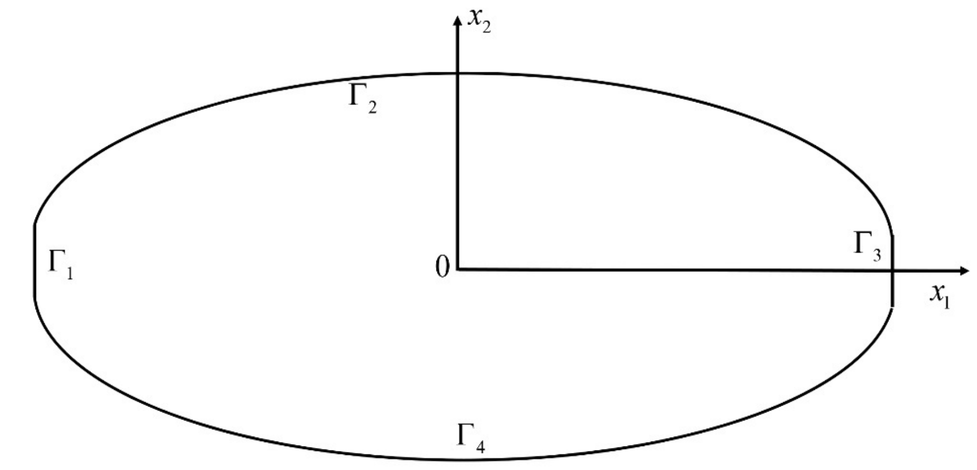
$$\Gamma = \partial \mathbf{V} = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 \cup \overline{\Gamma}_3 \cup \overline{\Gamma}_4.$$

Части границы

$$\begin{cases} \Gamma_2(x_1, x_2) = x_2 - h(x_1) = 0 \\ \Gamma_4(x_1, x_2) = x_2 + h(x_1) = 0 \\ \Gamma_{1,3}(x_1, x_2) = x_2 \pm L/2 \end{cases}$$

свободны от нагрузок

$h(x_1)$ -функция формы



Упругая пластина.

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{x} : -L/2 < x_1 < L/2, \quad -h(x_1) < x_2 < h(x_1)\}$$

с $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Постановка задачи 2.

Определяющие соотношения.

Уравнение динамического равновесия:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial t} = \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$$

Кинетическое соотношение

$$\rho \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = \tilde{\mathbf{p}}$$

Закон Гука:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Кинематическое соотношение:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\nabla \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\right)$$

Структура уравнения математической физики

Уравнение баланса:	$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial t} = \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$$	Не зависит от свойств среды
Уравнения состояния:	$$\rho \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = \tilde{\mathbf{p}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$$	Зависит от свойств среды
Геометрические, начальные и граничные ограничения:	$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\nabla \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\right)$$ $$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$$	Не зависят от свойств среды

Квадратичные свойства уравнений состояния

Соотношение между импульсом и скоростью :

$$\frac{1}{2\rho}\left(\tilde{\mathbf{p}} - \rho\frac{\partial\tilde{\mathbf{u}}}{\partial t}\right)^2 = \frac{\tilde{\mathbf{p}}^2}{2\rho} - \tilde{\mathbf{p}}\frac{\partial\tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{u}}}{\partial t}\right)^2 \geq 0$$

$\dfrac{\tilde{\mathbf{p}}^2}{2\rho}$ - плотность кинетической энергии, зависящая только от не измеряемых переменных, а именно, от импульсов;

$\tilde{\mathbf{p}}\dfrac{\partial\tilde{\mathbf{u}}}{\partial t}$ - плотность кинетической энергии, выраженная через скорости точек тела и неизменяемые переменные;

$\dfrac{\rho}{2}\left(\dfrac{\partial\tilde{\mathbf{u}}}{\partial t}\right)^2$ - последний член зависящий от геометрических (измеряемых) переменных.

Квадратичные свойства уравнений состояния

Соотношение между напряжениями и деформациями:

$$\frac{\mathbf{C}^{-1}}{2}\left(\tilde{\sigma}-\mathbf{C}:\tilde{\varepsilon}\right)^2=\frac{\tilde{\sigma}:\mathbf{C}^{-1}:\tilde{\sigma}}{2}-\tilde{\sigma}:\tilde{\varepsilon}+\frac{\tilde{\varepsilon}:\mathbf{C}^{-1}:\tilde{\varepsilon}}{2}\geq 0$$

$\dfrac{\tilde{\sigma}:\mathbf{C}^{-1}:\tilde{\sigma}}{2}$ - плотность упругой энергии, зависящая только от не измеряемых переменных, а именно, от напряжений;

$\tilde{\sigma}:\tilde{\varepsilon}$ - плотность упругой энергии выраженная через измеряемые (деформации) и неизменяемые переменные;

$\dfrac{\tilde{\varepsilon}:\mathbf{C}^{-1}:\tilde{\varepsilon}}{2}$ - последний член зависящий от геометрических (измеряемых) переменных

Постановка задачи 3.

Определяющие соотношения.

Уравнение динамического равновесия: $\mathbf{f} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.$

Закон Гука: $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$

$\boldsymbol{\sigma}$ - тензор напряжений; $\boldsymbol{\varepsilon}$ -тензор деформаций;

$\mathbf{E}$ - тензор модулей упругости; $\boldsymbol{\xi}$ - тензор невязки закона Гука;

$\mathbf{u}$ - вектор перемещений; $\mathbf{f}$ - вектор невязки уравнения динамического равновесия

ρ - объемная плотность

Задача оптимизации: $\Phi^{\omega}[\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \omega] = \frac{1}{2}\int_V (\rho\omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\xi} : \mathbf{E} : \boldsymbol{\xi})dV \to \min_{\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma}}$

Проекционный подход к задаче о нахождении собственных значений

Аппроксимации искомых функций:

$$\sigma_{11} = \sum\nolimits_{k=0}^{N} \hat{x}^k \sigma_{11}^{(k)}(x_1), \quad \sigma_{12} = \sum\nolimits_{k=0}^{N-1} \hat{x}^k \sigma_{12}^{(k)}(x_1), \quad \sigma_{22} = \sum\nolimits_{k=0}^{N} \hat{x}^k \sigma_{22}^{(k)}(x_1),$$

$$u_1 = \sum\nolimits_{k=0}^{N} \hat{x}^k u_1^{(k)}(x_1), \quad u_2 = \sum\nolimits_{k=0}^{N-1} \hat{x}^k u_2^{(k)}(x_1), \quad \hat{x} = \frac{x_2}{h}.$$

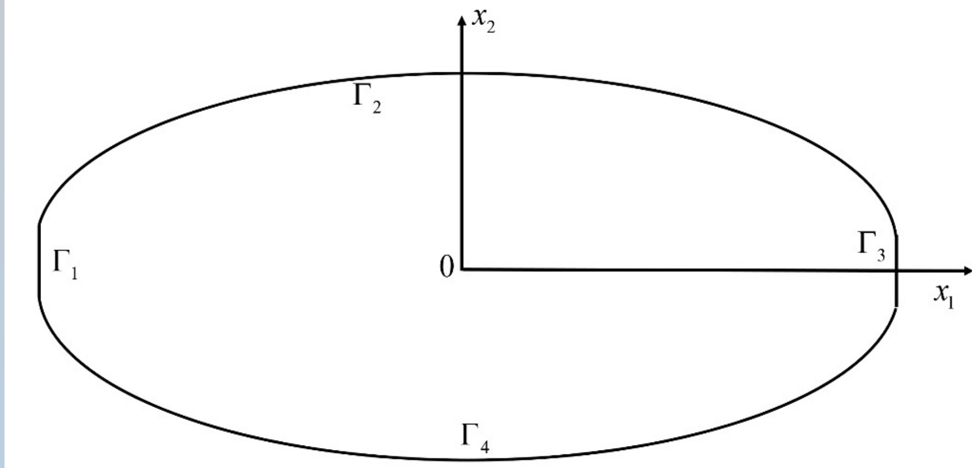
модификация метода Петрова – Галеркина

$$\Theta_\xi = \int\limits_{-h(x_1)}^{h(x_1)} \xi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\tau} dx_2 = 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathrm{T}.$$

Декомпозиция колебаний

Функции продольных и поперечных колебаний:

Колебания	u_1	u_2	σ_{11}	σ_{12}	σ_{22}
Продольные	$u_1^{(2j)}$	$u_2^{(2j+1)}$	$\sigma_{11}^{(2j)}$	$\sigma_{12}^{(2j+1)}$	$\sigma_{22}^{(2j)}$
Поперечные	$u_1^{(2j+1)}$	$u_2^{(2j)}$	$\sigma_{11}^{(2j+1)}$	$\sigma_{12}^{(2j)}$	$\sigma_{22}^{(2j+1)}$



Упругая балка.

$$E = \text{const}, \quad \rho = \text{const}, \quad \nu = \text{const}.$$

Поперечные колебания

Аппроксимации искомых функций:

$$\sigma_{11} = \hat{x}\sigma_{11}^{(1)}(x_1), \quad u_1 = \hat{x}u_1^{(1)}(x_1), \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}^{(0)}(x_1) + \hat{x}^2\sigma_{12}^{(2)}(x_1),$$

$$u_2 = u_2^{(0)}(x_1) + \hat{x}^2 u_2^{(2)}(x_1), \sigma_{22} = \hat{x}\sigma_{22}^{(1)}(x_1) + \hat{x}^3\sigma_{22}^{(3)}(x_1), \quad \hat{x} = \frac{x_2}{h(x_1)}.$$

Связанные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

$$\frac{d\sigma_{11}^{(2)}}{dx_1} - \sigma_{12}^{(2)} + \rho\omega^2 h^2 \left[\frac{h}{\rho\omega^2}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{h}\frac{d\sigma_{12}^{(2)}}{dx_1}\right) - \frac{2}{3}\frac{dh}{dx_1}u_2^{(2)} + \frac{2(1+\nu)}{3E}\sigma_{12}^{(2)} \right] = 0$$

$$3Eh\frac{du_2^{(3)}}{dx_1} - 2E\frac{dh}{dx_1}u_2^{(2)} - 2(1+\nu)\sigma_{12}^{(2)} + \frac{3Eh}{\rho\omega^2}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{h}\frac{d\sigma_{12}^{(2)}}{dx_1}\right) - 2E\frac{dh}{dx_1}u_2^{(2)} + 2(1+\nu)\sigma_{12}^{(2)} = 0,$$

Энергетические оценки качества приближенного решения

Интегродифференциальная формулировка:

$$\Phi = \int_\Omega \varphi(\sigma, u)\, d\Omega = 0, \quad \varphi = \frac{1}{2}(\xi_{11}^2 + 2\xi_{12}^2 + \xi_{22}^2),$$

Минимизационная формулировка:

$$\Phi = \min_{\sigma, u} \Phi(\sigma, u) = 0$$

$$\Phi = \Psi_1 - 2\Psi_2 + \Psi_3, \quad \Psi_i = \int_\Omega \psi_i(u, \sigma)\, d\Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad \psi_1 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{22}^2\right),$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E}\varepsilon_{11}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) + \frac{1+\nu}{E}\varepsilon_{12}\sigma_{12} + \frac{1}{E}\varepsilon_{22}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11})\right),$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E^2}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22})^2 + \frac{(1+\nu)^2}{E^2}\sigma_{12}^2 + \frac{1}{E^2}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11})^2\right).$$

Энергетическая оценка качества

$$\Delta_1 = \frac{\Psi_1 + \Psi_3}{2\Psi_2} - 1.$$

Численный пример 1.

Параметры Балки:

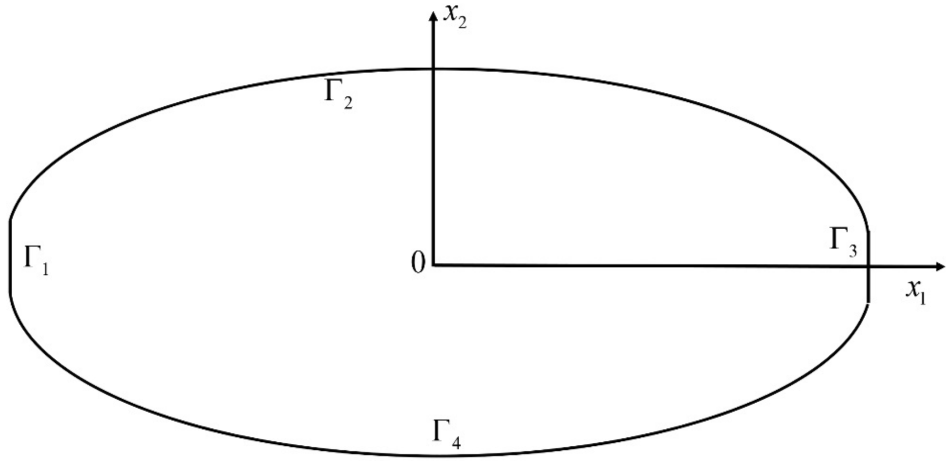
$$V = 0.01\,\mathrm{m}^3\,, \quad h(x) = h_0 = 0.1\mathrm{m} = const$$

$$J(x) = \frac{bh^3(x)}{12} = \frac{h^2(x)S(x)}{12}, \quad S(x) = bh(x).$$

Материальные параметры:

$$E = 70\,\mathrm{G}Pa, \quad \nu = 0.34,$$

$$\rho_V = 2700\,\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3, \quad \rho(x) = \rho_V bh(x)$$

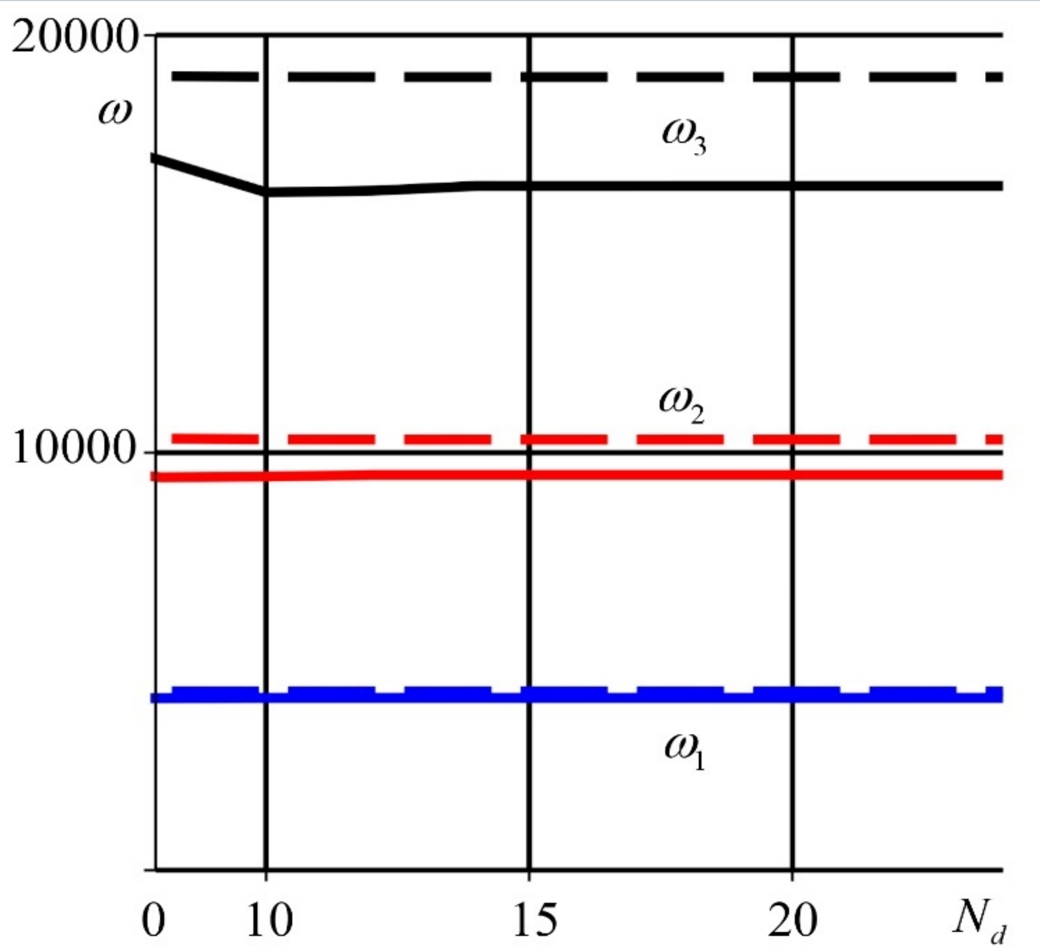


$$L = 1\,\mathrm{m}, \quad b = 0.1\,\mathrm{m} = const,$$

$$h(x) = \left(\frac{6}{5} + 12h_0\right)x^2 + h_0\,,$$

$$0 \le h_0 \le 0.15\,\mathrm{m}.$$

Сходимость собственных частот

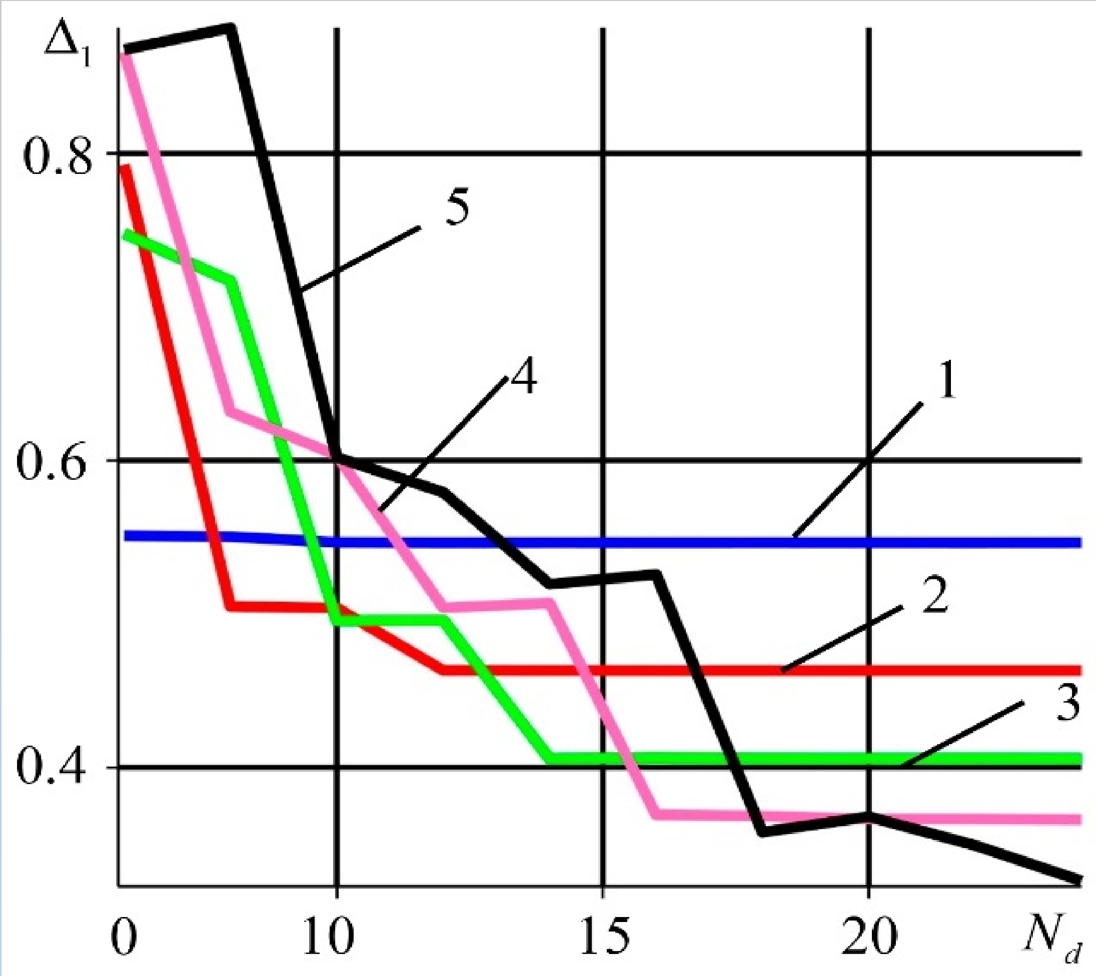


Пунктирные линии для

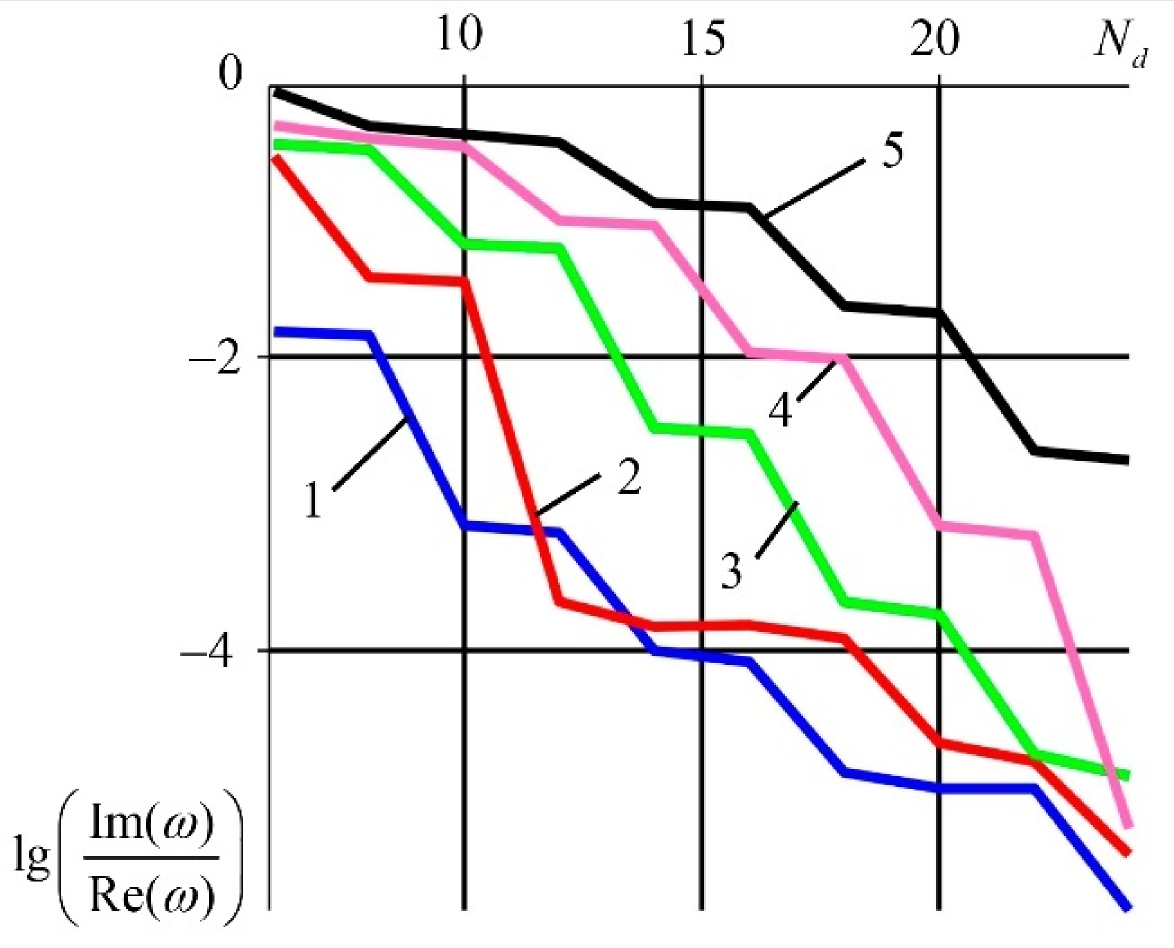
$$\rho(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)=0$$

Собственные частоты и их различия

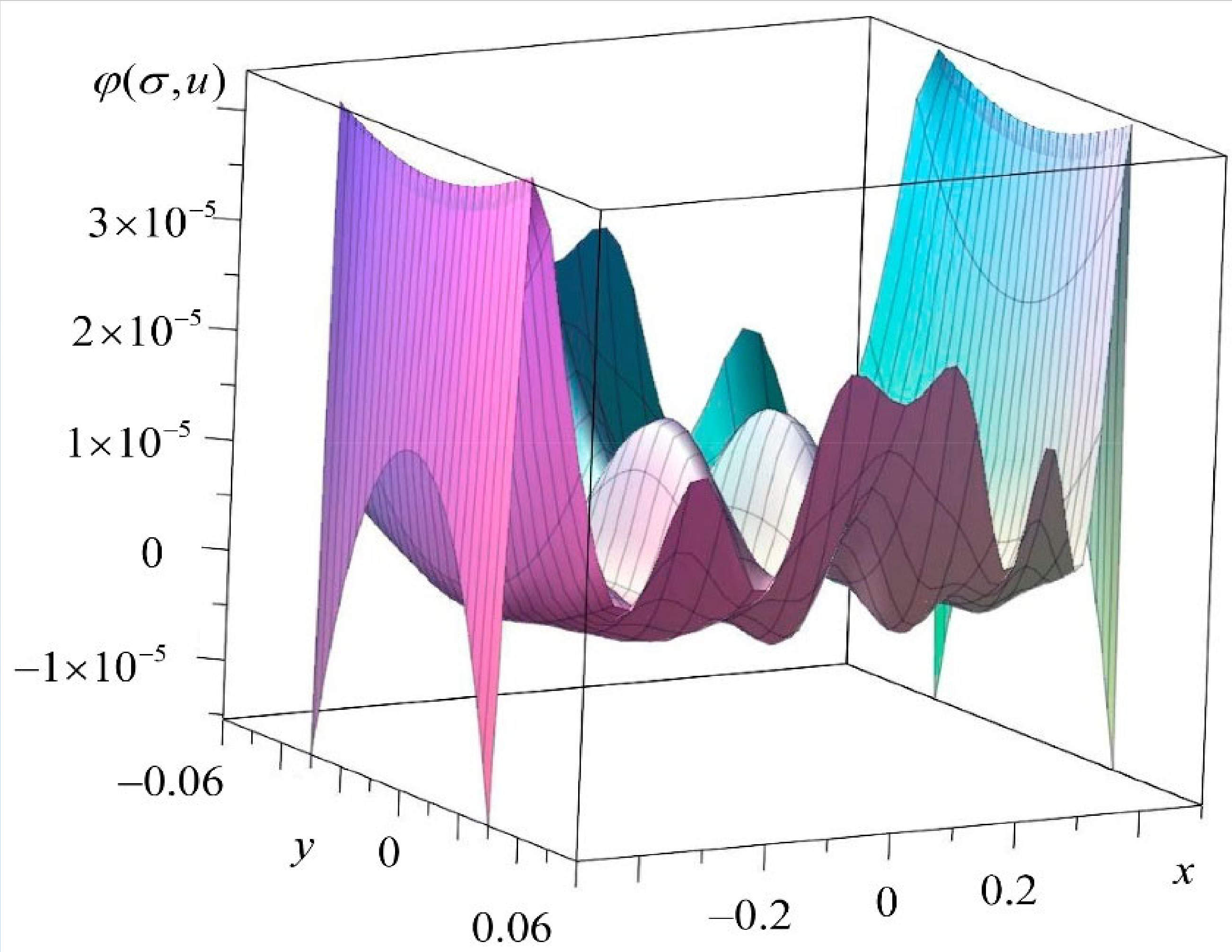
Моды	1	2	3	4	5
ω	4127.165	9467.842	16386.83	24473.37	33373.27
ω_c	4281.459	10313.37	18995.08	30419.58	44023.85
Δ_ω	3.73	8.93	15.9	24.3	33.7



Относительная энергетическая ошибка Δ_1 в зависимости от числа степеней свободы N_d для 5 первых собственных частот.



Относительная ошибка в логарифмическом масштабе в зависимости от числа степеней свободы N_d для 5 первых собственных частот.



Распределение локальной относительной погрешности $\phi(\sigma,u)$ при $N_d = 24$.

Список литературы.

1 Chaudhari T.D., Maiti S.K. Modelling of transverse vibration of beam of linearly variable depthwith edge crack // Engineering Fracture Mechanics. – 1999. – V. 63. – P. 425–445.

2 Jang S.K., Bert C.W. Free vibration of stepped beams: Exact and numerical solutions // Journal of Sound and Vibration. – 1989. – V. 130. – P. 342–346.

3 Simsek M., Cansiz S. Dynamics of elastically connected double-functionally graded beam systems with different boundary conditions under action of a moving harmonic load // Composite Structures. – 2012. – V. 94, – No. 9. – P. – 2861–2878.

4 Calim F.F. Free and forced vibrations of non-uniform composite beams // Computers and Structures. – 2009. – V. 88, – No. 3. – P. 413–423.

5 Kostin G. V., Saurin V. V. Asymptotic approach to free beam vibration analysis, Journal of Aerospace Engineering, –2009. –V. 22, No. 4, –P. 456–459.

6 Gusev B.V., Saurin V. V. On vibrations of nonhomogeneous beams. Ingenerny vestnik Dona. –2017. – No. 3 (46). – P. 50.

7 Kostin G.V., Saurin V. V. Integrodifferential relations in linear elasticity. De Gruyter, Berlin. – 2012

8 Kostin G.V., Saurin V. V. Dynamics of solid structures. Method using integrodifferential relations. De Gruyter, Berlin. –2017.

9 Saurin V.V.. Analysis of Dynamic Behavior of Beams with Variable Cross-section, – 2019. – V 40, – P. 364–374 |.

Спасибо за внимание.